

МИНОБРНАУКИ РОССИИ  
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ  
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»  
(ФГБОУ ВО «ВГУ»)

УТВЕРЖДАЮ  
Заведующий кафедрой  
теории функций и геометрии

  
Е.М.Семенов  
(подпись)

11.04.2024г.

## РАБОЧАЯ ПРОГРАММА УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ

**Б1.В.ДВ.04.02** Дополнительные вопросы теории меры и измеримых функций

**1. Код и наименование специальности:**

01.05.01 Фундаментальные математика и механика

**2. Специализация:** Современные методы теории функций в математике и механике

**3. Квалификация (степень) выпускника:** Математик. Механик. Преподаватель

**4. Форма обучения:** Очная

**5. Кафедра, отвечающая за реализацию дисциплины:** Кафедра теории функций и геометрии

**6. Составители программы:**

Шабров Сергей Александрович, доктор физ.-мат. наук, профессор

**7. Рекомендована:** Научно-методическим советом математического факультета.  
Протокол № 0500-03 от 28.03.2024 г.

**8. Учебный год:** 2027-2028

**Семестр(ы):** 8

## 9. Цели и задачи учебной дисциплины:

*Целями освоения учебной дисциплины являются:*

овладение конкретными математическими знаниями, классическими и современными методами исследования, необходимыми для применения в практической и научной деятельности, для изучения смежных дисциплин, для продолжения образования; совершенствование математического образования.

*Задачи учебной дисциплины:*

Основная задача — обеспечить прочное и сознательное овладение студентами системой математических знаний, умение применить их при решении задач естествознания, формирование устойчивого интереса к предмету, выявление и развитие математических способностей, ориентации на профессию.

## 10. Место учебной дисциплины в структуре ОПОП:

Учебная дисциплина Дополнительные вопросы теории меры и измеримых функций относится к дисциплинам по выбору части формируемой участниками образовательных отношений Блока 1.

Для успешного освоения дисциплины студенты должны владеть теорией множеств, основами функционального анализа, теорией интеграла Лебега.

## 11. Планируемые результаты обучения по дисциплине/модулю (знания, умения, навыки), соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы (компетенциями) и индикаторами их достижения:

Код	Название компетенции	Код(ы)	Индикатор(ы)	Планируемые результаты обучения
ПК-1.	Способен выявлять, применять, разрабатывать и целенаправленно использовать методы теории функций в задачах математики и механики.	ПК-1.1.	Обладает базовыми знаниями, полученными в области математических и (или) естественных наук, программирования и информационных технологий	Знать: - базовые понятия, полученные в области математических и (или) естественных наук, программирования и информационных технологий. Уметь: - собирать, обрабатывать, анализировать и обобщать результаты исследований в области теории функций. Владеть навыками: - практического проведения научно-исследовательской деятельности в математике, механике и информатике.
		ПК-1.2.	Умеет собирать, обрабатывать, анализировать и обобщать результаты исследований в области теории функций	
		ПК-1.3.	Имеет практический опыт научно-исследовательской деятельности в математике, механике и информатике	

## 12. Объем дисциплины в зачетных единицах/час.— 3 /108.

**Форма промежуточной аттестации:** экзамен.

## 13. Трудоемкость по видам учебной работы

Вид учебной работы		Трудоемкость		
		Всего	По семестрам	
	8 семестр		№ семестра	
Аудиторные занятия		50	50	
в том числе:	лекции	16	16	

	практические	-	-		
	лабораторные	34	34		
Самостоятельная работа		22	22		
В том числе: курсовая работа		-	-		
Форма промежуточной аттестации ( экзамен – 36 часов.)		36	36		
Итого:		108	108		

### 13.1. Содержание дисциплины

п/п	Наименование раздела дисциплины	Содержание раздела дисциплины	Реализация раздела дисциплины с помощью онлайн-курса, ЭУМК*
<b>1. Лекции</b>			
1.1	Интеграл Перрона	Определение интеграла Перрона Основные свойства интеграла Перрона Свойства интеграла Перрона Неопределенный интеграл Перрона Интеграл с переменным верхним пределом Определение интеграла Лебега по Юнгу Сравнение интегралов Перрона и Лебега	<a href="https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=2535">https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=2535</a>
1.2	Абстрактный интеграл	Абстрактный интеграл Обобщения абстрактного интеграла Узкий интеграл Данжуа Теорема Хаке Теорема Александрова-Ломана Широкий интеграл Данжуа	<a href="https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=2535">https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=2535</a>
1.3	Понятие о Пи-интеграле	Определение Пи-интеграла Свойства Пи-интеграла Приложение Пи-интеграла Связь Пи-интеграла с интегралом Лебега-Стилтьеса	<a href="https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=2535">https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=2535</a>
<b>3. Лабораторные работы</b>			
3.1	Интеграл Перрона	Определение интеграла Перрона Основные свойства интеграла Перрона Свойства интеграла Перрона Неопределенный интеграл Перрона Интеграл с переменным верхним пределом Определение интеграла Лебега по Юнгу Сравнение интегралов Перрона и Лебега	<a href="https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=2535">https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=2535</a>
3.2	Абстрактный интеграл	Абстрактный интеграл Обобщения абстрактного интеграла Узкий интеграл Данжуа Теорема Хаке Теорема Александрова-Ломана Широкий интеграл Данжуа	<a href="https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=2535">https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=2535</a>
3.3	Понятие о Пи-интеграле	Определение Пи-интеграла Свойства Пи-интеграла Приложение Пи-интеграла Связь Пи-интеграла с интегралом Лебега-Стилтьеса	<a href="https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=2535">https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=2535</a>

### 13.2. Темы (разделы) дисциплины и виды занятий

№ п/п	Наименование темы (раздела) дисциплины	Виды занятий (часов)				Всего
		Лекции	Практические	Лабораторные	Самостоятельная работа	
01	Интеграл Перрона	6		12	8	26
02	Абстрактный интеграл	6		12	8	26
03	Понятие о Пи-интеграле	4		10	6	20
	Итого	16		34	22	72

### 14. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины

В процессе преподавания дисциплины используются такие виды учебной работы, как лекции, лабораторные занятия, а также различные виды самостоятельной работы обучающихся. На лекциях излагается теоретический материал, на лабораторных занятиях решаются задачи по теоретическому материалу, прочитанному на лекциях. Освоение дисциплины предполагает не только обязательное посещение аудиторных занятий (лекций и лабораторных занятий) и активную работу на них, но и самостоятельную учебную деятельность в течении семестра.

При изучении курса «Дополнительные вопросы теории меры и измеримых функций» обучающимся следует внимательно слушать и конспектировать материал, излагаемый в ходе аудиторных занятий. Для его понимания и качественного усвоения рекомендуется следующая последовательность действий.

1. После каждой лекции рекомендуется подробно разобрать прочитанный теоретический материал, выучить все определения и формулировки теорем, разобрать примеры, решенные на лекции. Перед следующей лекцией обязательно повторить материал предыдущей лекции.

2. При подготовке к лабораторным занятиям повторить основные понятия по темам, рассмотреть примеры. Решая задачи на доказательство, предварительно понять, какой теоретический материал нужно использовать.

3. Выбрать время для работы с литературой по дисциплине в библиотеке или в системе «Электронный университет».

При подготовке к аудиторным занятиям, обучающимся важно помнить, что их задача, отвечая на основные вопросы плана занятия и дополнительные вопросы преподавателя, показать свои знания и кругозор, умение логически построить ответ, владение математическим аппаратом и иные коммуникативные навыки, умение отстаивать свою профессиональную позицию. В ходе устного опроса выявляются детали, которые по каким-то причинам оказались недостаточно осмысленными студентами в ходе учебных занятий. Тем самым опрос выполняет важнейшие обучающую, развивающую и корректирующую функции, позволяет студентам учесть недоработки и избежать их при подготовке к промежуточным аттестациям.

Самостоятельная учебная деятельность обучающегося предполагает выполнение следующих заданий:

1) самостоятельное изучение учебных материалов по разделам дисциплины с использованием основной и дополнительной литературы, информационно-справочных и поисковых систем, самостоятельное освоение понятийного аппарата выполнение практических заданий;

2) подготовку к текущим и промежуточной аттестациям.

Все выполняемые студентами самостоятельно задания подлежат последующей проверке преподавателем. Для успешной самостоятельной работы предполагается тесный контакт с преподавателем. Результаты текущих аттестаций учитываются преподавателем при проведении промежуточной аттестации.

Успешное освоение курса предполагает активное, творческое участие студента путем планомерной, повседневной работы

### 15. Перечень основной и дополнительной литературы, ресурсов интернет, необходимых для освоения дисциплины

а) основная литература:

№ п/п	Источник
1	<a href="http://www.lib.vsu.ru/elib/texts/method/vsu/m15-29.pdf">Смагин, Виктор Васильевич. Действительный анализ [Электронный ресурс] : учебное пособие : [для студ. 3 курса мат. фак. для направлений: 010100 - Математика, 010200 - Математика и компьютерные науки; для специальности 01701 - Фундаментальная математика и механика] / В.В. Смагин ; В.В. Смагин ; Воронеж. гос. ун-т .— Электрон. текстовые дан. — Воронеж : Издательский дом ВГУ, 2015 .— Загл. с титул. экрана .— Свободный доступ из интрасети ВГУ .— Текстовый файл .— Windows 2000; Adobe Acrobat Reader .— &lt;URL:<a href="http://www.lib.vsu.ru/elib/texts/method/vsu/m15-29.pdf">http://www.lib.vsu.ru/elib/texts/method/vsu/m15-29.pdf</a>&gt;.</a>
2	<a href="#">Баскаков, Анатолий Григорьевич. Интеграл Лебега : учебное пособие / А.Г. Баскаков, В.В. Юргелас ; Воронеж. гос. ун-т .— Воронеж : Издательско-полиграфический центр Воронежского государственного университета, 2013 .— 68, [1]</a>

б) дополнительная литература:

№ п/п	Источник
3	<a href="#">Натансон И.П. Теория функций вещественной переменной / И.П. Натансон. - М.: Издательство: Лань, 1999, 460 с.</a>
4	<a href="#">Дьяченко М. И. Мера и интеграл / М. И. Дьяченко. — М. : Факториал, 1998. — 158 с.</a>
5	<a href="#">Шилов Г.Е. Интеграл, мера и производная. Общая теория / Г.Е. Шилов, Б.Л. Гуревич. — 2-е изд., перераб. — М. : Наука; Физматлит, 1967. — 219 с.</a>

в) информационные электронно-образовательные ресурсы (официальные ресурсы интернет)\*:

№ п/п	Ресурс
6	<a href="http://www.lib.vsu.ru/">Электронный каталог Научной библиотеки Воронежского государственного университета. – (http // <a href="http://www.lib.vsu.ru/">www.lib.vsu.ru/</a>)</a>
7	<a href="#">Google, Yandex, Rambler</a>

### 16. Перечень учебно-методического обеспечения для самостоятельной работы (

№ п/п	Источник
1	<a href="#">Натансон И.П. Теория функций вещественной переменной / И.П. Натансон. - М.: Издательство: Лань, 1999, 460 с.</a>
2	<a href="#">Дьяченко М. И. Мера и интеграл / М. И. Дьяченко. — М. : Факториал, 1998. — 158 с.</a>
3	<a href="#">Шилов Г.Е. Интеграл, мера и производная. Общая теория / Г.Е. Шилов, Б.Л. Гуревич. — 2-е изд., перераб. — М. : Наука; Физматлит, 1967. — 219 с.</a>

### 17. Образовательные технологии, используемые при реализации учебной дисциплины, включая дистанционные образовательные технологии (ДОТ, электронное обучение (ЭО), смешанное обучение):

При реализации дисциплины используются следующие образовательные технологии: логическое построение дисциплины, установление межпредметных связей, обозначение теоретического и практического компонентов в учебном материале, включение элементов дистанционных образовательных технологий.

Изложение учебного материала основано на принципе системности, преемственности и последовательности и направлено на развитие интеллектуальных умений, профессиональных компетенций, формирование творческой личности высококвалифицированного специалиста, способного к саморазвитию, самообразованию, инновационной деятельности. Важнейшая цель преподавателя – систематизация

большого объема теоретического материала и обучение студента умению ориентироваться в этом материале.

Рекомендуется использование, как традиционных форм организации лекционного материала, так и внедрение таких интерактивных технологий, как проблемная лекция, когда знания вводятся как «неизвестное», которое необходимо «открыть».

В практической части курса используется стандартное современное программное обеспечение персонального компьютера.

Дисциплина может реализовываться с применением дистанционных образовательных технологий, например, на платформе «Электронный университет ВГУ» (<https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=2535>).

Перечень необходимого программного обеспечения: операционная система Windows или Linux, Microsoft Windows 10 Enterprise, LibreOffice 5 (*Writer (текстовый процессор)*, *Math (редактор формул)*), браузер Mozilla Firefox, Opera или Internet.

---

## **18. Материально-техническое обеспечение дисциплины:**

Для проведения лекционных и практических занятий используется учебная аудитория: специализированная мебель. Аудитория соответствует действующим санитарно-техническим нормам и противопожарным правилам.

Для самостоятельной работы используется компьютерный класс (ауд.310), оснащенный специализированной оргтехникой, необходимым программным обеспечением, электронными учебными пособиями и законодательно - правовой и нормативной поисковой системой, имеющий выход в глобальную сеть:

Ubuntu (бесплатное и/или свободное ПО, лицензия: <https://ubuntu.com/download/desktop> ); Visual Studio Community (бесплатное и/или свободное ПО, лицензия <https://visualstudio.microsoft.com/ru/vs/community/> ); LibreOffice (GNU Lesser General Public License (LGPL), бесплатное и/или свободное ПО, лицензия: <https://ru.libreoffice.org/about-us/license/> ); Lazarus (GNU Lesser General Public License (LGPL), бесплатное и/или свободное ПО, лицензия: <https://www.lazarus-ide.org/index.php> ); Free Pascal (GNU General Public License (GPL), бесплатное и/или свободное ПО, лицензия: <https://www.freepascal.org/faq.html> ); NetBeans IDE (GNU General Public License (GPL), бесплатное и/или свободное ПО, лицензия: <https://netbeans.org/cddl-gplv2.html> ); Python 2/3 (Python Software Foundation License (PSFL), бесплатное и/или свободное ПО, лицензия: <https://docs.python.org/3/license.html> ); 46 Gimp (GNU General Public License (GPL), бесплатное и/или свободное ПО, лицензия: <https://www.gimp.org/about/> ); Inkscape (GNU General Public License (GPL), бесплатное и/или свободное ПО, лицензия: <https://inkscape.org/about/license/> ); MiKTeX (Free Software Foundation (FSF), бесплатное и/или свободное ПО, лицензия: <https://miktex.org/copying> ); TeXstudio (GNU General Public License (GPL), бесплатное и/или свободное ПО, лицензия: <https://texstudio.org/> ); Maxima (GNU General Public License (GPL), бесплатное и/или свободное ПО, лицензия: <http://maxima.sourceforge.net/faq.html> ); Denwer (бесплатное и/или свободное ПО, лицензия: <http://www.denwer.ru/faq/other.html> ); 1С: Предприятие 8 (бесплатное и/или свободное ПО, лицензия: [https://v8.1c.ru/predpriyatie/questions\\_licence.htm](https://v8.1c.ru/predpriyatie/questions_licence.htm) ); Foxit Reader (бесплатное и/или свободное ПО, лицензия [https://www.foxitsoftware.com/pdf\\_reader/eula.html](https://www.foxitsoftware.com/pdf_reader/eula.html) ); Deductor Academic (Academic Free License, бесплатное и/или свободное ПО, лицензия: <https://basegroup.ru/system/files/documentation/licence-deductor-academic-20160322.pdf> ); WinDjView (GNU General Public License (GPL), бесплатное и/или свободное ПО, лицензия: <https://windjview.sourceforge.io/ru/> ); 7-Zip (GNU Lesser General Public License (LGPL), бесплатное и/или свободное ПО, лицензия: <https://www.7-zip.org/license.txt> ); Mozilla Firefox (Mozilla Public License (MPL), бесплатное и/или свободное ПО, лицензия: <https://www.mozilla.org/en-US/MPL/> ); VMware Player (бесплатное и/или свободное ПО, лицензия: [https://www.vmware.com/download/open\\_source.html](https://www.vmware.com/download/open_source.html) ); VirtualBox (GNU General Public License (GPL), бесплатное и/или свободное ПО, лицензия: [https://www.virtualbox.org/wiki/Licensing\\_FAQ](https://www.virtualbox.org/wiki/Licensing_FAQ) ); Astra Linux Common Edition (бесплатное

и/или свободное ПО, лицензия: <https://dl.astralinux.ru/astra/stable/orel/> ); PostgreSQL (бесплатное и/или свободное ПО, лицензия: <https://www.postgresql.org/about/licence/> ); GeoGebra (бесплатное и/или свободное ПО, лицензия: <https://www.geogebra.org/license> ); R (бесплатное и/или свободное ПО, лицензия: <https://www.r-project.org/Licenses/> ); Wing-101 (бесплатное и/или свободное ПО, лицензия: <https://wingware.com/license/wing101> ); Loginom Community Edition (бесплатное и/или свободное ПО, лицензия: <https://loginom.com/platform/pricing> ); MySQL (бесплатное и/или свободное ПО, лицензия)

При реализации дисциплины с использованием дистанционного образования возможны дополнения материально-технического обеспечения дисциплины

## 19. Оценочные средства для проведения текущей и промежуточной аттестаций

Порядок оценки освоения обучающимися учебного материала определяется содержанием следующих разделов дисциплины:

№ п/п	Наименование раздела дисциплины (модуля)	Компетенция(и)	Индикатор(ы) достижения компетенции	Оценочные средства
1.	Интеграл Перрона	ПК-1	ПК-1.1, ПК-1.2, ПК-1.3	Перечень вопросов Индивидуальное задание
2.	Абстрактный интеграл	ПК-1	ПК-1.1, ПК-1.2,	Перечень вопросов
3.	Понятие о Пи-интеграле	ПК-1	ПК-1.1, ПК-1.2, ПК-1.3	Перечень вопросов
Промежуточная аттестация форма контроля – экзамен				Перечень вопросов

## 20. Типовые оценочные средства и методические материалы, определяющие процедуры оценивания

### 20.1. Текущий контроль успеваемости

Контроль успеваемости по дисциплине осуществляется с помощью следующих оценочных средств:

#### Примерный перечень вопросов

1. Определение интеграла Перрона
2. Основные свойства интеграла Перрона
3. Свойства интеграла Перрона
4. Неопределенный интеграл Перрона
5. Интеграл с переменным верхним пределом
6. Определение интеграла Лебега по Юнгу
7. Сравнение интегралов Перрона и Лебега
8. Абстрактный интеграл
9. Обобщения абстрактного интеграла
10. Узкий интеграл Данжуа
11. Теорема Хаке
12. Теорема Александрова-Ломана
13. Широкий интеграл Данжуа
14. Определение Пи-интеграла
15. Свойства Пи-интеграла
16. Приложение Пи-интеграла
17. Связь Пи-интеграла с интегралом Лебега-Стилтьеса

#### Примерные индивидуальные задания

1. Доказать существование функции, интегрируемой по Перрону, но не интегрируемой по Лебегу.

2. Доказать, что обратного быть не может.
3. Доказать, что интеграл Перрона является абсолютно сходящимся тогда и только тогда, когда он приводится к интегралу Лебега.
4. При каком условии Т-интегрируемая функция на отрезке  $[a, b]$  будет Т-интегрируема и на каждом отрезке  $[p, q]$ , содержащемся в  $[a, b]$ .

Описание технологии проведения

Текущий контроль представляет собой проверку усвоения учебного материала, регулярно осуществляемую на занятиях.

Текущий контроль предназначен для проверки хода и качества формирования компетенций, стимулирования учебной работы обучающихся и совершенствования методики освоения новых знаний. Он обеспечивается проведением опросов по теоретическому материалу, выполнением индивидуальных заданий, содержащих задачи на доказательство.

При текущем контроле уровень освоения учебной дисциплины и степень сформированности компетенции определяются оценками «зачтено» и «незачтено».

Требования к выполнению заданий (шкалы и критерии оценивания)

При проведении текущего контроля успеваемости используются следующие **показатели**:

- 1) знание основных понятий и определений;
- 2) знание формулировок и доказательств основополагающих результатов;
- 3) логика изложения, рассуждений;
- 4) умение иллюстрировать ответ примерами.

**Шкала оценивания:**

Зачтено: выполнение заданий и ответы в ходе опроса соответствуют перечисленным показателям, обучающийся дает ответы на дополнительные вопросы, может быть не совсем полные. Демонстрирует умение проводить доказательства, возможно с некоторыми ошибками.

Не зачтено: в ходе опроса ответы обучающегося не соответствуют ни одному из перечисленных показателей. Обучающийся демонстрирует фрагментарные знания и умения или их отсутствие.

## 20.2 Промежуточная аттестация

Промежуточная аттестация проводится в соответствии с Положением о промежуточной аттестации обучающихся по программам высшего образования.

Предназначена для определения уровня освоения всего объема учебной дисциплины и проводится в форме экзамена.

Промежуточная аттестация по дисциплине осуществляется с помощью следующих оценочных средств:

### Перечень вопросов к экзамену

1. Определение интеграла Перрона
2. Основные свойства интеграла Перрона
3. Свойства интеграла Перрона
4. Неопределенный интеграл Перрона
5. Интеграл с переменным верхним пределом
6. Определение интеграла Лебега по Юнгу
7. Сравнение интегралов Перрона и Лебега
8. Абстрактный интеграл
9. Обобщения абстрактного интеграла
10. Узкий интеграл Данжуа
11. Теорема Хаке
12. Теорема Александрова-Ломана



13. Широкий интеграл Данжуа
14. Определение Пи-интеграла
15. Свойства Пи-интеграла
16. Приложение Пи-интеграла
17. Связь Пи-интеграла с интегралом Лебега-Стилтьеса

#### Описание технологии проведения

Промежуточная аттестация (экзамен) проводится в формате собеседования с преподавателем по билетам. Обучающийся получает два теоретических вопроса на знание понятий и определений, формулировок и доказательств теорем. Оценивание ответа производится по пятибалльной шкале: «отлично», «хорошо», «удовлетворительно», «неудовлетворительно».

Время подготовки к ответу не должно превышать одного академического часа. При необходимости, в ходе ответа преподаватель может задавать уточняющие и дополнительные вопросы.

#### Требования к выполнению заданий, шкалы и критерии оценивания

При проведении промежуточной аттестации используются следующие **показатели**:

- 1) знание основных понятий и определений;
- 2) знание формулировок и доказательств основополагающих результатов;
- 3) логика изложения, рассуждений;
- 4) умение иллюстрировать ответ примерами.

Критерии оценивания компетенций	Уровень сформированности компетенций	Шкала оценок
Обучающийся в полной мере владеет понятийным аппаратом данной области науки (теоретическими основами дисциплины), ответ построен логично, демонстрирует умение иллюстрировать ответ примерами, фактами, данными научных исследований.	Повышенный уровень	отлично
Обучающийся владеет понятийным аппаратом данной области науки (теоретическими основами дисциплины), допускает незначительные ошибки при ответе.	Базовый уровень	хорошо
Обучающийся владеет частично теоретическими основами дисциплины, фрагментарно способен дать ответ.	Пороговый уровень	удовлетворительно
Обучающийся демонстрирует отрывочные, фрагментарные знания, допускает грубые ошибки,	–	неудовлетворительно